Sur les ensembles ramifiés.

Par

Toshio Hiraguchi

On dit qu'un ensemble ramifié (tableau ramifié) E est *régulier* s'il jouit des propriétés suivantes :

(I) Le rang ρ de E (voir n⁰ 1) est un nombre initial régulier.

(II) La puissance de toute section de E (voir n⁰ 1) est plus petite que la puissance du nombre ρ c'est-à-dire plus petite que la puissance d'un ensemble bien ordonné dont le type d'ordre est ρ.

Dans son travail [1], M. Kurepa a construit un ensemble ramifié régulier de rang Ω tel que s'il est établi qu'il possède une partie bien ordonnée de type Ω ou qu'il possède une partie de puissance $\aleph_1$ dont les éléments sont incomparables deux à deux, le problème de Souslin [2] sera résolu affirmativement. D'autre côté M. Miller a démontré, dans sa note [3], que s'il existe un ensemble ramifié régulier de rang Ω qui possède ni partie bien ordonné de type Ω, ni partie de puissance $\aleph_1$ dont les éléments sont incomparables deux à deux, le problème de Souslin sera résolu negativement.

Dans cette Note je vais prouver un théorème (voir n⁰ 6) qui donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble ramifié régulier de rang ρ possède une patie bien ordonné de type ρ.

1. Soient E un ensemble ordonné et a un élément de E. Le sous-ensemble $\{x \mid x \in E,\ x < a\}$ est désigné par $S(a\,;E)$ et appelé segment de E par a. Le sous-ensemble $\{x \mid x \in E,\ x \geqq a\}$ est désigné par $R(a\,;E)$. On appelle *ensemble ramifié* l' ensemble ordonné E s'il jouit de telle propriété que pour tout élément a de E le segment $S(a\,;E)$ est un ensemble bien ordonné.

Soit E un ensemble ramifié. On dit qu'un élément a de E est *de rang* α si le type d'ordre du segment $S(a\,;E)$ est le nombre ordinal α. L'ensemble des éléments de rang α s' appelle *section de rang* α et se note E_α. On désigne par x_α un élément de E_α. On voit sans peine que :

(1·1) *Pour chaque element x_α de rang $\alpha > 0$ il existe une et une seule partie bien ordonnée* $\{x_\varphi \mid \varphi \leqq \alpha\}$ telle que

$$x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_\varphi < \cdots < x_\alpha.$$

(1·2) *Pour chaque couple d'éléments x_α et x_β tels que $\alpha < \beta$, $x_\alpha < x_\beta$ ou x_α et x_β sont incomparables.*

Il en suit que $E_\alpha = \emptyset$ entraîne $E_\varphi = \emptyset$ pour tout nombre ordinal $\varphi \geqq \alpha$.

Soit ρ un nombre ordinal. On dit que le rang d'un ensemble ramifié E est ρ, si

$E_\rho = \emptyset$ tandis que $E_\varphi \neq \emptyset$ pour tout nombre ordinal $\varphi < \rho$. Il est clair qu'un ensemble ramifié E de rang ρ peut être représenté comme une réunion des sections $E_\varphi : E = \bigcup_{\varphi<\rho} E_\varphi$.

2. Soient E un ensemble ramifié de rang ρ et φ un nombre ordinal plus petit que ρ. On dit qu'un élément de E est de *première catégorie* par rapport à φ s'il est incomparable à tous les éléments de rang φ de E. On note $C_1\ (\varphi\,; E)$ la partie formée de tous les éléments de première catégorie par rapport à φ.

En tenant compte de (1•1) et de (1•2) on peut vérifier facilement les deux propositions suivantes.

(2•1) *Si* $x \in C_1\ (\alpha;E)$, *le rang de* x *est plus petit qu'*α, *d'ou on a* $C_1\ (0;E) = \emptyset$.

(2•2) *Pour chaque couple de nombres* α, β *tels que* $\alpha < \beta < \rho$, *on a* $C_1\ (\alpha;E) \subseteqq C_1\ (\beta\,; E)$.

On dit qu'un élement x est *de sconde catégorie par rapport à un* nombre $\varphi<\rho$ s'il existe un élément x_φ de rang φ tel que $x < x_\varphi$. On note $C_2\,(\varphi;E)$ la partie formée de tous les éléments de sconde catégorie par rapport à φ.

On peut vérifier sans peine les propositions suivantes.

(2•3) $x \in C_2\,(\alpha\,; E)$ *entraîne* $S\,(x;E) \subset C_2\,(\alpha\,; E)$.

(2•4) *Si* $\alpha < \beta\ (<\rho)$, *on a* $E_\alpha \cap C_2\,(\beta\,; E) \neq \emptyset$.

(2•5) *Si* $\alpha < \beta\ (<\rho)$, *on a* $C_2\,(\alpha\,; E) \supseteqq C_2\,(\beta\,; E)$.

(2•6) *Si* $\alpha < \beta\ (<\rho)$, *on a* $E_\alpha = [E_\alpha \cap C_1\,(\beta\,; E)] \cup [E_\alpha \cap C_2\,(\beta\,; E)]$.

On dit qu'un élément x de E est *de sconde catégorie dans* E s'il existe un nombre ordinal α tel que

$$x \in \bigcap_{\alpha<\varphi<\rho} C_2\,(\varphi\,; E).$$

On note $C_2\,(E)$ la partie formée de tous les éléments de sconde catégorie dans F.

On voit sans peine que :

(2•7) $x \in C_2\,(E)$ *entraîne* $S\,(x\,; E) \subset C_2\,(E)$

On a, de plus, les deux propositions suivantes.

(2•8) *Quel que soit le nombre* $\alpha\ (<\rho)$,

$$C_2\,(E) = \bigcap_{\alpha<\varphi<\rho} C_2\,(\varphi;E).$$

Soient, en effet, α et β deux nombres tels que $\alpha < \beta\ (<\rho)$. Par (2•5) on a, pour chaque nomber $\varphi \leqq \beta$ et pour chaque nombre $\psi > \beta$,

$$C_2\,(\varphi\,; E) \supseteqq C_2\,(\psi\,; E)$$

d'ou on a

$$\bigcap_{\alpha<\varphi\leqq\beta} C_2\,(\varphi\,; E) \subset \bigcap_{\beta<\psi<\rho} C_2\,(\psi\,; E).$$

On a donc, quels que soient les nombres α et β,

$$\bigcap_{\alpha<\varphi<\rho} C_2(\varphi\,;E)=\bigcap_{\beta<\psi<\rho} C_2(\psi\,;E)\,;$$

en particulier on a, quel que soit le nomber α,

$$\bigcap_{\alpha<\varphi<\rho} C_2(\varphi\,;E)=\bigcap_{0<\varphi<\rho} C_2(\varphi\,;E)$$

d'ou

$$\bigcap_{\alpha<\varphi<\rho} C_2(\varphi\,;E)=C_2(E)$$

par la définition de $C_2(E)$.

(2·9) *Pour tout nombre* $\alpha\ (<\rho)$ *on a*

$$E_\alpha\cap C_2(E)=E_\alpha-\bigcup_{\alpha<\varphi<\rho} C_1(\varphi\,;E).$$

En effet, par (2·8) et par (2·6), on a

$$\begin{aligned} E_\alpha\cap C_2(E) &= E_\alpha\cap[\bigcap_{\alpha<\varphi<\rho} C_2(\varphi\,;E)] \\ &= \bigcap_{\alpha<\varphi<\rho}[E_\alpha\cap C_2(\varphi;E)] \\ &= E_\alpha-\bigcup_{\alpha<\varphi<\rho}[E_\alpha-E_\alpha\cap C_2(\varphi\,;E] \\ &= E_\alpha-\bigcup_{\alpha<\varphi<\rho}(E_\alpha\cap C_1(\varphi\,;E)) \\ &= E_\alpha-E_\alpha\cap(\bigcup_{\alpha<\varphi<\rho} C_1(\varphi\,;E)) \end{aligned}$$

3. Soit E un ensemble ramifié de rang ρ. Posons, pour chaque nombre $\varphi\,(<\rho)$,

$$P^\varphi_\varphi=C_1(\varphi\,;E)-\bigcup_{\psi<\varphi} C_1(\psi\,;E)$$

et posons, pour chaque nombre $\alpha\ (<\rho)$,

$$E^\varphi_\alpha=E_\alpha\cap P^\varphi_\varphi,\quad \alpha<\varphi<\rho.$$

(3·1) *Pour chaque nombre* $\alpha\ (<\rho)$ *on a* $C_1(\alpha\,;E)=\bigcup_{\varphi\leqq\alpha} P^\varphi_\varphi$.

En effet il est clair, par la définition et par (2·2), que

$$C_1(\alpha\,;E)\supset\bigcup_{\varphi\leqq\alpha} P^\varphi_\varphi.$$

Pour d'avoir l'inclusion inverse soit x un élément de $C_1\ (\alpha\,;E)$.
Comme $C_1(0\,;E)=\emptyset$, il existe un nombre $\varphi\leqq\alpha$ tel que $x\in C_1(\varphi\,;E)$ tandis que $x\notin C_1(\psi\,;E)$ pour tout nombre $\psi<\varphi$, de sorte que

$$x\in C_1(\varphi\,;E)-\bigcup_{\psi<\varphi}C_1\ (\psi\,;E)=P^\varphi_\varphi$$

On a donc $$C_1\,(\alpha\,;E)\subseteqq\bigcup_{\varphi\leqq\alpha}P^\varphi_\varphi\,.$$

(3·2) *Si* $\alpha<\beta\ (<\rho)$, *on a* $E^\varphi_\alpha\subset C_1(\beta\,;E)$ *pour tout nombre* φ *tel que* $\alpha<\varphi<\beta$, *et par suite on a*

$$\bigcup_{\alpha<\varphi<\beta} E^\varphi_\alpha\subset C_1(\beta\,;E).$$

Cela résulte imédiatement de (3·1) et des définitions de P^φ_φ et de E^φ_α.

(3·3) *Si* $\alpha<\beta\ (<\rho)$, *on a* $E_\alpha\cap C_1(\beta;E)=\bigcup_{\alpha<\varphi\leqq\beta} E^\varphi_\alpha$.

En effet par (3•1) on a

$$\begin{aligned} E_\alpha \cap C_1(\beta ; E) &= E_\alpha \cap (\cup_{\varphi \leqq \beta} P_\varphi^\varphi) \\ &= \cup_{\varphi \leqq \beta} (E_\alpha \cap P_\varphi^\varphi) \\ &= \cup_{\alpha < \varphi \leqq \beta} (E_\alpha \cap P_\varphi^\varphi) \\ &= \cup_{\alpha < \varphi \leqq \beta} E_\alpha^\varphi . \end{aligned}$$

(3•4) *Pour chaque nombre* $\alpha < \rho$ *on a*

$$E_\alpha \cap C_2(E) = E_\alpha - \cup_{\alpha < \varphi < \rho} E_\alpha^\varphi .$$

En effet, par (2•9) et par (3•3), on a,

$$\begin{aligned} E_\alpha - (E_\alpha \cap C_2(E)) &= E_\alpha \cap (\cup_{\alpha < \varphi < \rho} C_1(\varphi ; E) \\ &= \cup_{\alpha < \varphi < \rho} (E_\alpha \cap C_1(\varphi ; E)) \\ &= \cup_{\alpha < \varphi < \rho} (\cup_{\alpha < \psi \leqq \varphi} E_\alpha^\psi) \\ &= \cup_{\alpha < \varphi < \rho} E_\alpha^\varphi . \end{aligned}$$

Il en résulte aussitôt le

Lemme 1. *Soient* E *un ensemble ramifié de rang* ρ, *et* E_α *une section de* E *telle qu'il existe un nombre* β *tel que* $\beta > \alpha$ *et* $E_\alpha^\varphi = \emptyset$ *pour tout nombre* $\varphi \geqq \beta$; *alors on a* $E_\alpha \cap C_2(E) \neq \emptyset$.

Démonstration. Admettons, par contre, que $E_\alpha \cap C_2(E) = \emptyset$. Alors, par (3•4) et par (3•3), on a

$$E_\alpha = \cup_{\alpha < \varphi < \beta} E_\alpha^\varphi \subset E_\alpha \cap C_1(\beta ; E) \subset C_1(\beta ; E)$$

d'où on a $E_\alpha \cap C_1(\beta ; E) = E_\alpha$. Donc, par (2•6), on a $E_\alpha \cap C_2(\beta ; E) = \emptyset$, contrairement à (2•4).

4. On dit qu'un ensemble ramifié E est *régulier* s'il jouit des propriétés suivantes :

(I) Le rang ρ de E est un nombre initial régulier, c'est-à-dire ρ est un nombre initial qui n' est pas limite d'une suite transfinie de type $< \rho$.

(II) La puissance de toute section de E est plus petite que la puissance du nombre ordinal ρ.

Désignons par $|M|$, au lieu de $\overline{\overline{M}}$, la puissance d'un ensemble M, et par $|\varphi|$, au lieu de $\overline{\varphi}$, la puissance d'un nombre ordinal φ.

(4•1) *Soit* E *un ensemble ramifié régulier de rang* ρ. *Quel que soit le nombre* α $(<\rho)$, *il existe un nombre* $\beta(\alpha) > \alpha$ *tel que* $E_\alpha^\varphi = \emptyset$ *pour out tnombre* $\varphi \geqq \beta(\alpha)$.

Démonstration. Admettons que le contraire soit vrai. Alors pour tout nombre $\gamma > \alpha$ l'ensemble $M_\gamma = \{\varphi \mid \gamma < \varphi < \rho, \ E_\alpha^\varphi \neq \emptyset\}$ des nombres φ tels que $\gamma < \varphi < \rho$ et

$E_\alpha^\varphi \neq 0$ ne serait pas vide. Par suite on peut définir par induction transfinie une suite transfinie croissante $\{\alpha(\varphi)\}_{\alpha<\varphi<\rho}$ des nombres ordinaux $\alpha(\varphi)$ tels que $E_\alpha^{\alpha(\varphi)} \neq 0$ comme il suit. Soit $\alpha(\alpha+1)$ le plus petit nombre de l'ensemble $M_{\alpha+1}$. Supposons que pour tout nombre φ tel que $\alpha<\varphi<\beta$ un nombre $\alpha(\varphi)$ soit défini. Dans le cas ou β est un nombre isolé soit $\alpha(\beta)$ le plus petit nombre de l'ensemble $M_{\beta-1}$. Dans le cas ou β est un nombre limite posons

$$\lambda = \lim_{\alpha<\varphi<\beta} \alpha(\varphi).$$

Comme tout $\alpha(\varphi)$ est plus petit que ρ et ρ est régulier, $\lambda<\rho$. Soit $\alpha(\beta)$ le plus petit nombre de l'ensemble M_λ. Évidement $\alpha(\beta)>\alpha(\varphi)$ pour tout nombre φ tel que $\alpha<\varphi<\beta$. Ainsi on obtiendra la suite demândée. Comme ρ est un nombre initial il est indécomposable par rapport à l'addition, c'est-à-dire il n'y a pas de nombre ordinal $\xi<\rho$ tel que $\alpha+\xi=\rho$. Il en résulte que le type d'ordre de la suit $\{\alpha(\varphi)\}_{\alpha<\varphi<\rho}$ est ρ. Or tous ensembles $E_\alpha^{\alpha(\varphi)}$ ne sont pas vides et ils sont mutuellement disjoints. Donc on a

$$|\cup_{\alpha<\varphi<\rho} E_\alpha^{\alpha(\varphi)}| \geqq |\rho|.$$

D'autre côté par (3.4) on a

$$|E_\alpha| = |E_\alpha \cap C_2(E)) \cup (\cup_{\alpha<\varphi<\rho} E_\alpha^\varphi)|$$

$$\geqq |\cup_{\alpha<\varphi<\rho} E_\alpha^{\alpha(\varphi)}|$$

Par suite on a $|E_\alpha| \geqq |\rho|$, contrairement à propriété (II). Notre assertion est ainsi démontrée.

Il résulte de (4·1), (3·4) et du lemme 1 que

(4·2) *Si un ensemble ramifié E de rang ρ est régulier, on a*

$$E_\alpha \cap C_2(E) \neq 0$$

quel que soit le nombre $\alpha<\rho$ et il existe un nombre $\beta(\alpha)>\alpha$ tel que

$$E_\alpha \cap C_2(E) = E_\alpha - \cup_{\alpha<\varphi<\beta(\alpha)} E_\alpha^\varphi.$$

Posons maintenant

$$E_\alpha^* = E_\alpha \cap C_2(E), \quad \overset{*}{E} = \cup_{\varphi<\rho} \overset{*}{E}_\varphi.$$

Il est clair que $\overset{*}{E} = C_2(E)$. Voilà la proposition

(4·3) *Si un ensemble ramifié E de rang ρ est régulier, le sous-ensemble $\overset{*}{E}$ est aussi un ensemble ramifié régulier de rang ρ dont les elements sont tous de sconde catégorie dans $\overset{*}{E}$, c'est-a-dire $\overset{*}{E} = C_2(\overset{*}{E})$.*

Démonstration. Soit a un élément quelconque de $\overset{*}{E}$. Par la définition de $\overset{*}{E}$ et par (2.7) on a

$S(a;E) \subseteqq \overset{*}{E}$ *d'ou on a* $S(a;\overset{*}{E}) = S(a;E)$. Donc $S(a;\overset{*}{E})$ est bien ordonné pour tout élément a de $\overset{*}{E}$;par suite $\overset{*}{E}$ est un ensemble ramifé. D'aprsè (4•2), pour tout nombre $\varphi < \rho$, on a $\overset{*}{E}_\varphi \neq 0$. Évidement $\overset{*}{E}_\rho = 0$. Le rang de $\overset{*}{E}$ est donc ρ. Il est clair que $|\overset{*}{E}_\varphi| < |\rho|$ pour tout nombre $\varphi < \rho$. $\overset{*}{E}$ jouit anisi des propriétés (I) et (II), donc il est régulier. Pour démontrer que $\overset{*}{E} = C_2(\overset{*}{E})$ admettons que c'est le contraire qui a lieu. Soit x un élément de $\overset{*}{E} - C_2(\overset{*}{E})$. Alors $x \in C_1(\alpha;\overset{*}{E})$ pour certain nombre $\alpha < \rho$. D'aprés (4•2) on a

$$\overset{*}{E}_\alpha = E_\alpha - \bigcup_{\alpha<\varphi<\beta(\alpha)} E_\alpha^\varphi$$

pour certain nombre $\beta(\alpha) > \alpha$. Soit r un nombre tel que $\beta(\alpha) < r < \rho$. Comme $x \in C_2(E) = \overset{*}{E}$, il existe, d'aprés (1•1), un élément x_r de E_r et un élément x_α de E_α tels que $x < x_\alpha < x_r$. Par (2•1) $x_\alpha \notin C_1(r;E)$. Or Par (3•2) on a $E_\alpha^\varphi \subset C_1(r;E)$ pour tout nombre φ tel que $\alpha < \varphi < \beta(\alpha)$. On a donc

$$C_1(r;E) \supset \bigcup_{\alpha<\varphi<\beta(\alpha)} E_\alpha^\varphi = E_\alpha - \overset{*}{E}_\alpha.$$

Par suite on a $x_\alpha \notin E_\alpha - \overset{*}{E}_\alpha$ d' où on a $x_\alpha \in \overset{*}{E}_\alpha$, ce qui est impossible puisque $x < x_\alpha$ *et* $x \in C_1(\alpha;\overset{*}{E})$.

Par conséquent on a le

Lemm 2. *Si un ensemble ramifié de rang ρ est régulier, il possède une partie qui est aussi un ensemble ramifié réglier de rang ρ dont les éléments sont tous de sconde catégorie dans lui-même.*

5. Soit E un ensemble ramifié de rang ρ. Une chaîne I dans E (c'est-à-dire une partie bien ordonnée de E) est appelée *chaîne initiale* si $x \in I$ entraîne $S(x;E) \subset I$.

Une chaîne maximale dans E est une chaîne initiale. Chaque segment de E est aussi une chaîne initiale ; mais la converse n'est pas nécessarement vraie ; une chaîne initiale est un segment ou non selon qu'elle a une borne supérieure dans E ou non.

Soit I_α une chaîne initiale dans E de type α. Si I_α est un segment de E, la borne supérieure de I_α est un élément de E_α. Si I_α n'est pas segment on peut ajouter un nouveau élément $\bar{x}_\alpha$ à E_α de telle façon qu'il est la borne supérieure de I_α et qu'il n'est comparable à aucun élément de E-I_α. En ajoutant, de cette manire, un nouveau élément x_α à E_α pour toute chaîne initial de type α qui n'est pas segment on obtient un nouveau ensemble qu'on note $\bar{E}_\alpha$. Posons

$$\bar{E} = \bigcup_{\alpha<\rho} \bar{E}_\alpha.$$

Alors $\bar{E}$ est aussi un ensemble ramifié qu'on appelle la *fermeture* de E. Il est clair que la section $(\bar{E})_\alpha$ de rang α de $\bar{E}$ est égale à $\bar{E}_\alpha$ et que toute chaîne initiale dans E a la borne supérieure dans $\bar{E}$. Par conséquent $\bar{E}$ peut differer de E seulement des sections dont le rang sont nombres limites. Quant à la section $\bar{E}_\rho$ de rang ρ de $\bar{E}$, elle est vide ou non vide (par suite le rang de $\bar{E}$ est ρ ou $\rho+1$) suivant qu'il y a une chaîne initiale de type ρ dans E ou non. En tous cas $\bar{E}-\bar{E}_\rho$ est un ensemble ramifié de rang ρ et chaque chaîne initiale de type $\alpha<\rho$ dans E a la borne supérieure dans $\bar{E}-\bar{E}_\rho$ (naturellement dans $\bar{E}_\alpha$).

Considérons maintenant l'ensemble $\boldsymbol{E}$ des chaînes initialauxe dans E ordonné par la relation d'inclusion. En désignant par $\boldsymbol{E}_{\alpha-1}$ ou par $\boldsymbol{E}_\alpha$ l'ensemble des chaînes initiauxe de rang α selon qu' α est un nombre isolé ou un nombre limite, $\boldsymbol{E}$ se représente come une réunion de $\boldsymbol{E}_\varphi$: $\boldsymbol{E}=\bigcup_{\varphi<\rho}\boldsymbol{E}_\varphi$. On voit sans peine que la correspondence qui fait correspondre à chaque élément I de $\boldsymbol{E}$ la borne supérieure de I dans $\bar{E}$ est biunivoque ($\bar{E}_\alpha$ se correspondant biunivoquement à $\boldsymbol{E}_\alpha$). Par suite $\boldsymbol{E}$ est aussi un en semble ramifié samblable à $\bar{E}$.

On a la proposition

(5•1) *Soit E un ensemble ramifié dont le rang ρ est un nombre inilial régulier jouissant de la propriété*

(III) *pour tout nombre $\alpha<\rho$, $|\bar{E}_\alpha|<|\rho|$, c'est-à-dire $\bar{E}-\bar{E}_\rho$ est un ensemble ramifié régulier de rang ρ; alors il y a au moins une cha:ne initiale dans E dont le type d'ordre est ρ.*

Démonstration. Soit $\boldsymbol{E}$ l'ensemble des chaînes initiauxe dans E.

Comme l'ensemble $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{E}_\rho=\bigcup_{\alpha<\rho}\boldsymbol{E}_\alpha$ est samblable à $\bar{E}-\bar{E}_\rho$, il est un ensemble ramifié régulier de rang ρ. Il y a donc, par le lemme 2, une partie $\overset{*}{\boldsymbol{E}}$ de $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{E}_\rho$ dont les élément sont tous de sconde catégorie dans lui-même. Donc tout élément de $\overset{*}{\boldsymbol{E}}$ dont le rang est plus petit que ρ (c'est-à-dire toute chaîne initiale dans E dont le type d'ordre est plus petit que ρ) n'est pas maximal. Par conséquent si un élément de $\overset{*}{\boldsymbol{E}}$ est maximal, il a le type d'ordre ρ comme une chaîne dans E. D'autre côté on voit facilement que l'ensemble ordonné $\overset{*}{\boldsymbol{E}}$ est inductif, c'est-à-dire chaque partie totalement ordonnée de $\overset{*}{\boldsymbol{E}}$ a la borne supérieure dans lui-même. Donc $\overset{*}{\boldsymbol{E}}$ possède au moins un élément maximal par le lemme de Zorn. Cet élément maximal doit être de type ρ. Notre lemme est ainsi établi.

Il est clair que si un ensemble ramifié régulier de rang ρ possède une chaine initiale I_ρ de type ρ, il possède une partie qui est un ensemble ramifié régulier de rang ρ (par exemple, I_ρ elle-même). On a donc le

Lemme 3. *Pour qu'un ensemble ramifié dont le rang ρ est un nombre inital régulier possède une partie bien ordonnée de type ρ, il faut et il suffit qu'il possède une partie A tele que $\bar{A}-\bar{A}_\rho$ est un ensemble ramiflé régulier de rang ρ.*

6. Soit E un ensemble ramifié (régulier ou non) de rang ρ. Pour une partie F_α de la section E_α posons

$$S(F_\alpha\,;E)=\bigcup_{a\alpha\in F\alpha}S(a_\alpha\,;E)\ \text{et}\ R(F_\alpha\,;E)=\bigcup_{a\alpha\in F\alpha}R(a_\alpha\,;E)$$

où $$S(a_\alpha\,;E)=\{x\mid x\in E,\ x<a_\alpha\}\ \text{et}\ R(a_\alpha\,;E)=\{x\mid x\in E,\ x\geqq a_\alpha\}.$$

(6•1) *Si $\alpha<\beta<\gamma$, on a*

$$E_\alpha \cap S(E_\beta ; E) \supseteqq E_\alpha \cap S(E_\gamma ; E),$$

$$E_\gamma \cap R(E_\alpha ; E) = E_\gamma \cap R(E_\beta ; E).$$

En effet, pour tout élément a_γ de E_γ il existe, par (1•1), un élément a_β tel que $a_\beta < a_\gamma$. Il en suit que pour tout segment $S(a_\gamma ; E)$ il existe un segment $S(a_\beta ; E)$ tel que $S(a_\beta ; E) \subset S(a_\gamma ; E)$. Cela entraîne

$$S(a_\beta ; E) \cap E_\alpha = S(a_\gamma ; E) \cap E_\alpha.$$

Par suite on a

$$S(a_\gamma ; E) \cap E_\alpha \in S(E_\beta ; E) \cap E_\alpha$$

d'où

$$E_\alpha \cap S(E_\gamma ; E) \subseteqq E_\alpha \cap S(E_\beta ; E).$$

La dernière partie de la proposition peut être prouvée de la même raisonnement.

(6•2) *Pour un ensemble* $\boldsymbol{F}$ *de parties* F_α *de* E_α, *on a*

$$\cap_{F_\alpha \in \boldsymbol{F}} S(F_\alpha ; E) = S(\cap_{F_\alpha \in \boldsymbol{F}} F_\alpha ; E).$$

En effet, $S(a_\alpha ; E) \in \cap_{F_\alpha \in \boldsymbol{F}} S(F_\alpha ; E)$ entraîne que $S(a_\alpha ; E) \in S(F_\alpha ; E)$ pour tout $F_\alpha \in \boldsymbol{F}$, ce qui montre que $a_\alpha \in F_\alpha$ pour toute $F_\alpha \in \boldsymbol{F}$, c'est-à-dire $a_\alpha \in \cap_{F_\alpha \in \boldsymbol{F}} F_\alpha$. On a donc $S(a_\alpha ; E) \in S(\cap_{F_\alpha \in \boldsymbol{F}} F_\alpha ; E)$ d'où on a

$$\cap_{F_\alpha \in \boldsymbol{F}} S(F_\alpha ; E) \subseteqq S(\cap_{F_\alpha \in \boldsymbol{F}} F_\alpha ; E).$$

Pour avoir l'inclusion inverse, il suffit qu'on marche inversement le long de ce raisonnement.

(6•3) *Si* $\alpha < \varphi < \psi$ $(< \rho)$, *on a*

$$E_\alpha \cap S(E_\varphi \cap S(E_\psi ; E) ; E) = E_\alpha \cap S(E_\psi ; E).$$

En effet, $a_\alpha \in E_\alpha \cap S(E_\psi ; E)$ entraîne $a_\alpha \in S(a_\psi ; E)$ pour certain élement $a_\psi \in E_\psi$, d'où on a $a_\alpha < a_\psi$. Il y a donc un élément $a_\varphi \in E_\varphi$ tel que $a_\alpha < a_\varphi < a_\psi$, ce qui entraîne $a_\varphi \in S(a_\psi ; E)$. Par suite on a $a_\varphi \in E_\varphi \cap S(E_\psi ; E)$.

Or on a $a_\alpha \in S(a_\varphi ; E)$, donc $a_\alpha \in S(E_\varphi \cap S(E_\psi ; E) ; E)$, d'où on a l'inclusion

$$E_\alpha \cap S(E_\psi ; E) \subseteqq E_\alpha \cap S(E_\varphi \cap S(E_\psi ; E) ; E).$$

Pareillement on a l'inclusion inverse.

Soient α et β deux nombres tels que $\alpha < \beta < \rho$ et soit F_β une partie de E_β. L'ensemble $E_\alpha \cap S(F_\beta ; E)$ s'appelle *trace* de F_β sur E_α et se note $T_\alpha(F_\beta)$.

(6•4) *Si* $\alpha < \varphi < \psi < (< \rho)$, *on a* $T_\alpha(E_\varphi) \supseteqq T_\alpha(E_\psi)$ *et* $T_\alpha(E_\psi) = T_\alpha(T_\varphi(E_\psi))$.

En effet, d'après (6•3) on a

$$\begin{aligned} T_\alpha(T_\varphi(E_\psi)) &= E_\alpha \cap S(T_\varphi(E_\psi)\,;\,E) \\ &= E_\alpha \cap S(E_\varphi \cap S(E_\psi\,;\,E)\,;\,E) \\ &= E_\alpha \cap S(E_\psi\,;\,E) \\ &= T_\alpha(E_\psi). \end{aligned}$$

$T_\alpha(E_\varphi) \supseteqq T_\alpha(E_\psi)$ est évident par (6•1) et par la définition de la trace.

(6•5) *Si* $\beta < \alpha$, *on a*

$$T_\beta(\cap_{\varphi>\alpha} T_\alpha(E_\varphi)) = \cap_{\varphi>\alpha} T_\beta(T_\alpha(E_\varphi)).$$

En effet, par la définition de la trace et par (6•2), on a

$$\begin{aligned} T_\beta(\cap_{\varphi>\alpha} T_\alpha(E_\varphi)) &= E_\beta \cap S(\cap_{\varphi>\alpha} T_\alpha(E_\varphi)\,;\,E) \\ &= E_\beta \cap (\cap_{\varphi>\alpha} S(T_\alpha(E_\varphi)\,;\,E)) \\ &= \cap_{\varphi>\alpha}(E_\beta \cap S(T_\alpha(E_\varphi)\,;\,E)) \\ &= \cap_{\varphi>\alpha} T_\beta(T_\alpha(E_\varphi)). \end{aligned}$$

(6•6) *Si* $\cap_{\varphi>\alpha} T_\alpha(E_\varphi) = \emptyset$ *pour un nombre* $\alpha < \rho$, *alors* $\cap_{\varphi>\beta} T_\beta(E_\varphi) = \emptyset$ *pour tout nombre* $\beta < \rho$.

En effet, lorsque $\alpha \geqq \beta$ on a par (6•4) et par (6•5)

$$\begin{aligned} \cap_{\varphi>\beta} T_\beta(E_\varphi) &\subseteqq \cap_{\varphi>\alpha} T_\beta(E_\varphi) \\ &= \cap_{\varphi>\alpha} T_\beta(T_\alpha(E_\varphi)) \\ &= T_\beta(\cap_{\varphi>\alpha} T_\alpha(E_\varphi)) \\ &= \emptyset. \end{aligned}$$

Lorsque $\alpha < \beta$ comme on a $T_\alpha(E_\varphi) \subseteqq T_\alpha(E_\psi)$ pour tout nombre $\varphi > \psi$, on a

$$\begin{aligned} \cap_{\varphi>\beta} T_\alpha(E_\varphi) &= (\cap_{\varphi>\beta} T_\alpha(E_\varphi)) \cap (\cap_{\beta \geqq \psi > \alpha} T_\alpha(E_\psi)) \\ &= \cap_{\varphi>\alpha} T_\alpha(E_\varphi) \\ &= \emptyset. \end{aligned}$$

Posons maintenant

$$A(\varphi) = S(E_\varphi\,;\,E) \cup R(E_\varphi\,;\,E)$$

pour chaque nombre $\varphi < \rho$ et posons

$$A = \cap_{\varphi<\rho} A(\varphi).$$

Il est clair qu' A est un ensemble ramifié dont la section A_α est égale à $A \cap E_\alpha$ excepté le cas où A est vide.

(6•7) $A_\alpha = \cap_{\varphi>\alpha} T_\alpha(E_\varphi)$ *pour tout nombre* $\alpha < \rho$.

En effet,

$$A_\alpha = A \cap E_\alpha = \bigcap_{\varphi<\rho} (A(\varphi) \cap E_\alpha)$$
$$= (\bigcap_{\varphi\leqq\alpha} (A(\varphi) \cap E_\alpha)) \cap (\bigcap_{\varphi>\alpha} (A(\varphi) \cap E_\alpha))$$

Or comme on voit sans peine

$$A(\varphi) \cap E_\alpha = \begin{cases} R(E_\varphi ; E) \cap E_\alpha & \text{si } \varphi \leqq \alpha \\ S(E_\varphi ; E) \cap E_\alpha & \text{si } \varphi > \alpha. \end{cases}$$

On a donc

$$A_\alpha = (\bigcap_{\varphi\leqq\alpha} (R(E_\varphi ; E) \cap E_\alpha)) \cap (\bigcap_{\varphi>\alpha} (S(E_\varphi ; E) \cap E_\alpha)).$$

Mais par (6•1) on a

$$\bigcap_{\varphi\leqq\alpha} (R(E_\varphi ; E) \cap E_\alpha) = R(E_\alpha ; E) \cap E_\alpha$$
$$= (\bigcup_{a_\alpha \in E_\alpha} R(a_\alpha ; E)) \cap E_\alpha$$
$$= E_\alpha.$$

Il en résulte que

$$A_\alpha = \bigcap_{\varphi>\alpha} (S(E_\varphi ; E) \cap E_\alpha) = \bigcap_{\varphi>\alpha} T_\alpha(E_\varphi).$$

Désignons par $\bar{A}_\alpha$ la section de rang α de la fermeture $\bar{A}$ de A (cf. n° 5). On a la proposition

(6•8) $\bar{A}_\alpha = A_\alpha$ *pour tout nombre* $\alpha < \rho$.

Démonstration. Il est clair que $\bar{A}_0 = A_0$. Pour $\alpha > 0$, évidement $\bar{A}_\alpha \supseteqq A_\alpha$. Admettons que $\bar{A}_\alpha - A_\alpha \neq 0$ et soit $\bar{a}_\alpha$ un élément de $\bar{A}_\alpha - A_\alpha$. Le segment $S(\bar{a}_\alpha ; \bar{A})$ de $\bar{A}$ est une chaîne initiale dans A qui n'a pas borne supérieure dans A. Il est évident que

$$S(\bar{a}_\alpha ; \bar{A}) \supset A = \bigcap_{\varphi<\rho} A(\varphi),$$

d'où on a, pour un nombre arbitrair $\beta > \alpha$,

$$S(\bar{a}_\alpha ; \bar{A}) \subset A(\beta) = S(E_\beta ; E) \cup R(E_\beta ; E).$$

Mais $S(\bar{a}_\alpha ; \bar{A}) \cap R(E_\beta ; E) = 0$, car le rang de chaque élément de $S(\bar{a}_\alpha ; \bar{A})$ est plus petit que β. On a donc

$$S(\bar{a}_\alpha ; \bar{A}) \subset S(E_\beta ; E) = \bigcup_{a_\beta \in E_\beta} S(a_\beta ; E).$$

Donc, comme on voit sans peine, on a

$$S(\bar{a}_\alpha ; \bar{A}) \subset S(a_\beta ; E) \text{ pour certaine } a_\beta \in E_\beta.$$

Par suite $S(\bar{a}_\alpha ; \bar{A})$ doit avoir la borne supérieure dans $S(a_\beta ; E)$ (nécessairement dans $\bar{A}_\alpha$), ce qui est absurde.

On peut maintenant établir le théorème annoncé au début de cette note:

Théorème. *Pour qu'un ensemble ramifié régulier E de rang ρ possède au moins une partie bien ordonnée de type ρ, il faut et il suffit que l'intersection des traces de tous les sections de rang >0 sur la section E_0 n'est pas vide c'est-a-dire*

$$\bigcap_{0<\varphi<\rho} T_0 \quad (E_\varphi) \neq \emptyset.$$

Démonstraions. Considérons la partie A de E introduite ci-dessus :

$$A = \bigcap_{\varphi<\rho} A(\varphi).$$

La conditiont $\bigcap_{0<\varphi<\rho} T_0 (E_\varphi) \neq \emptyset$ entraîne, par (6•6), que $\bigcap_{\alpha<\varphi<\rho} T_\alpha (E_\varphi) \neq \emptyset$ pour tout nombre $\alpha < \rho$. Donc on a, par (6•7),

$$A_\alpha \neq \emptyset \text{ pour tout nombre } \alpha < \rho.$$

Le rang de A est donc ρ. Or d'après (6•8) on a

$$| \bar{A}_\alpha | = | A_\alpha | \leqq | E_\alpha | < \rho.$$

$\bar{A} - \bar{A}_\rho$ est ainsi un ensemble ramifié régulier de rang ρ. Donc E possède, par lemme 3, une partie bien ordonnée de type ρ. Il est évident que la contraire est vraie.

Remarque. La condition $\bigcap_{0<\varphi<\rho} T_0 (\varphi) \neq \emptyset$ est equivalente à la condition $\bigcap_{\alpha<\varphi<\rho} T_\alpha (\varphi) = \emptyset$ pour un (ou pour tout) nombre α tel que $0<\alpha<\rho$.

Référances.

1. G. Kurepa, "Ensembes ordonnés et ramifiés," Publ. Math. Univ. Belgrade, 4 (1935), pp. 1–38.
2. M. Souslin, "problème 3", Fundamenta Math., t.1 (1920), p. 223.
3. E. W. Miller. "A note on Souslin's probrem," Amer. Journ. of Math. vol. 65 (1943), pp. 673-678.

Errata: T. HIRAGUCHI, "Sur les ensembles ramifiés".

P. 8, ligne 13 : L'égalité doit être remplacé par l'inclusion $\supseteqq$.

P. 8, ligne 14-19 : On doit lire : En effet, $x \in S\,(\bigcap_{F_\alpha \in \boldsymbol{F}} E_\alpha\,;\,E)$ entraîne $x \in S\,(a_\alpha\,;\,E)$ pour un élément a_α de $\bigcap_{F_\alpha \in \boldsymbol{F}} F_\alpha$, d'où on a

$$x \in S\,(F_\alpha\,;\,E) \text{ pour tout } F_\alpha \in \boldsymbol{F}.$$

c'est-à-dire

$$x \in \bigcap_{F_\alpha \in \boldsymbol{F}} S\,(F_\alpha\,;\,E).$$

P. 9, lignes 7 et 9 : L'égalité doit être remplacé par l'inclusion $\subseteqq$.

P. 9, ligne 12 : L'inégalité "$\beta < \alpha$" doit être remplacé par l'inégalité "$\beta > \alpha$".

P. 9, lignes 13-21 : On doit lire : En effet, admettons, pour contre, que $\bigcap_{\varphi > \beta} T_\beta\,(E_\varphi) \neq 0$ pour un nombre $\beta > \alpha$. Alors on a $T_\alpha\,(\bigcap_{\varphi > \beta} T_\beta\,(E_\varphi)) \neq 0$. Par (6.4) on a

$$T_\alpha\,(E_\varphi) = T_\alpha\,(T_\beta\,(E_\varphi)) \supseteqq T_\alpha\,(\bigcap_{\psi > \beta} T_\beta\,(E_\psi)) \text{ pour tout } \varphi > \beta,$$

d'où on a

$$\bigcap_{\varphi > \alpha} T_\alpha\,(E_\varphi) \supseteqq T_\alpha\,(\bigcap_{\psi > \beta} T_\beta\,(E_\psi)) \neq 0,$$

contrairement à la condition $\bigcap_{\varphi > \alpha} T_\alpha\,(E_\varphi) = 0$.

P. 10, ligne 21 : "$\supset$" doit être remplacé par "$\subset$".

P. 10, ligne 30 : "$\bar{A}_\alpha$" doit être remplacé par "A_α".

P. 11, ligne 3 : "*rang* > 0 *sur la section* E_0" doit être remplacé par "*rang* $> \alpha$ *sur la section* E_α *pour tout nombre* $\alpha > \rho$".

P. 11, ligne 4 : "$\bigcap_{0 < \varphi < \rho} T_0\,(E_\varphi) \neq 0$" doit être remplacé par "$\bigcap_{\alpha < \varphi < \rho} T_\alpha\,(E_\varphi) \neq 0$ pour tout $\alpha < \rho$".

P. 11, lignes 7-8 : "La condition------. Donc on a" doit être remplacé par "La condition $\bigcap_{\alpha < \varphi < \rho} T_\alpha\,(E_\varphi) \neq 0$ pour tout nomdre $\alpha < \rho$ entraîne,".

P. 11, lignes 14-15 : La remarque doit être rayée.